

1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces stables

Exercice 1 ★ Dérivation –

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe f' . Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1413]

Exercice 2 ★★ Avec des suites –

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1414]

Exercice 3 ★★ Sous-espaces stables et endomorphismes qui commutent –

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E .

1. Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v . La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose désormais que u est un projecteur. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1419]

Exercice 4 ★★ Une CNS pour que deux endomorphismes commutent –

Soient f, g deux endomorphismes du \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie tels que f est diagonalisable. Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1420]

Exercice 5 ★★ Vecteur propre commun –

Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u et v commutent. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1423]

2 Diagonalisation de matrices

Exercice 6 ★ –

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1387]

Exercice 7 ★★ Avec un paramètre –

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1389]

Exercice 8 ★★ Réduction d'une matrice circulante –

Pour a, b, c des nombres complexes, on pose

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et $J = M(0, 1, 0)$.

1. Exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I_3 , J et J^2 .
2. Démontrer que J est diagonalisable, et donner son spectre.
3. En déduire que $M(a, b, c)$ est diagonalisable et donner son spectre.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2627]

Exercice 9 ★★ Matrice de rang 1 –

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?
2. Plus généralement, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1391]

Exercice 10 ★★ Réduction d'une matrice par polynôme annulateur –

$$\text{Soit } J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array} \right).$$

1. Calculer A^2 , puis A^3 .
2. A l'aide d'un polynôme annulateur de A , démontrer que A est diagonalisable.
3. Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A , donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A , puis donner les valeurs propres elles-mêmes ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
4. En déduire le polynôme caractéristique de A .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3115]

Exercice 11 ★★ Que des 1 ! –

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice A dans \mathcal{B} vérifie $a_{i,j} = 1$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

1. Déterminer la dimension de $\ker(f)$.
2. Soit $v = \sum_{i=1}^n e_i$. Calculer $f(v)$.
3. Démontrer que f est diagonalisable. Préciser les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés.

Exercice 12 ★★★★★ **Déduire du cas 2x2 –**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

2. Soient $p \geq 1$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ des réels. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ tel que $a_{i,2p+1-i} = \alpha_i$ si $1 \leq i \leq 2p$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur \mathbb{R} .

Indication ▼ Correction ▼

[1390]

Exercice 13 ★★★★★ **De rang 2!!! –**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A . En déduire que si $n > 1$, alors 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

2. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres, et en déduire que A est diagonalisable.

Indication ▼ Correction ▼

[1393]

Exercice 14 ★★★★★ **Matrice d'ordre n –**

Soit, pour $n \geq 1$, la matrice M_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $1, 2, \dots, n$ et les autres coefficients sont tous égaux à 1. Soit P_n le polynôme caractéristique de M_n .

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $P_n(X) = (X - (n-1))P_{n-1}(X) - X(X-1)\dots(X-(n-2))$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $(-1)^{n+k}P_n(k) > 0$.

3. En déduire que M_n est diagonalisable et que chaque intervalle $]0, 1[,]1, 2[, \dots,]n-1, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de M_n .

Indication ▼ Correction ▼

[1395]

Exercice 15 ★★★★★ –

Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

Calculer P_1 et P_2 .

2. Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2 \cos \alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Démontrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}.$$

3. En déduire que A_n est diagonalisable.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1396]

Exercice 16 Une grande matrice! –

On considère, pour $n \geq 4$, la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $i = n$ ou $j = 1$ ou $j = n$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Démontrer que A est diagonalisable.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1397]

Exercice 17 Un bloc –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1398]

3 Application de la diagonalisation

Exercice 18 Calcul d'une puissance n -ième –

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1403]

Exercice 19 Racine cubique –

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1400]

Exercice 20 Application à des suites récurrentes –

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .

2. Calculer A^n en fonction de n .

3. On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0 , v_0 et w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n . En déduire u_n , v_n et w_n en fonction de n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1401]

Exercice 21 ★★★★★ **Commutant d'une matrice –**

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A .
2. En déduire toutes les matrices M qui commutent avec A .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1404]

Exercice 22 ★★★★★ **Matrices semblables? –**

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1405]

Exercice 23 ★★★★★ **Application au calcul d'un déterminant circulant –**

Soient a_0, \dots, a_{n-1} des nombres complexes, et soient A, J les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que J est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
2. Déterminer un polynôme Q tel que $A = Q(J)$.
3. En déduire le déterminant de A .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1402]

4 Trigonalisation de matrices

Exercice 24 ★ **Trigonalisation - avec indication –**

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 . Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w) .
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k .
6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1406]

Exercice 25 ★★ **Trigonalisation - avec indications -**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A . En déduire que f est trigonalisable.

2. Démontrer que f n'est pas diagonalisable.

3. Notons $g = f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $B = A - 2I_3$ sa matrice dans la base canonique.

Calculer B^2 . Déterminer une base de $\ker(g)$, puis démontrer que $\ker(g)$ et $\text{vect}(e_2)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 . Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure. Donner la matrice de f dans cette base.

4. Calculer B^2 .

5. Déterminer une base de $\ker(g)$, puis démontrer que $\ker(g)$ et $\text{vect}(e_2)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

6. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure.

7. Donner la matrice de f dans cette base.

8. Déduire de 3.1. la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3116]

5 Réduction d'autres endomorphismes

Exercice 26 ★★ **Un endomorphisme sur les polynômes -**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = P - (X + 1)P'$. Justifier que ϕ est diagonalisable et donner les valeurs propres de ϕ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1415]

Exercice 27 ★★ **Endomorphisme d'un espace de polynômes -**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto (X^2 - 1)P'(X) - (nX + 1)P(X)$.

1. Justifier que f est bien définie.

2. Pour $k = 0, \dots, n$, on note $P_k(X) = (1 - X)^k(1 + X)^{n-k}$. Calculer $f(P_k)$.

3. En déduire que f est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

4. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme f est-il bijectif?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3112]

Exercice 28 ★★★ **Endomorphisme de polynômes -**

Soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L(P) = X^n P(\frac{1}{X})$. Démontrer que L est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres associés.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1410]

Exercice 29 ★★★ **Matrice nilpotente -**

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.

2. On considère

$$\begin{aligned} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto MB - BM. \end{aligned}$$

Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B .
- En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1411]

Exercice 30 ★★★★★ Composition –

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(g) = f \circ g$.

- Démontrer que toute valeur propre de f est une valeur propre de ϕ puis, si λ est une valeur propre de f , déterminer $E_\lambda(\phi)$.
- En déduire que si f est diagonalisable, alors ϕ est diagonalisable.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1412]

Exercice 31 ★★★★★ Reste de la division euclidienne –

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux éléments de E premiers entre eux tels qu'en outre B est scindé à racines simples. On notera x_1, \dots, x_p ses racines. On note ϕ l'application de E dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B .

- Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E . Est-ce un isomorphisme ?
- Démontrer que 0 est une valeur propre de ϕ et déterminer le sous-espace propre associé.
- Démontrer que, pour chaque $k = 1, \dots, p$, $P_k(X) = \prod_{j \neq k} (X - x_j)$ est un vecteur propre de ϕ .
- En déduire que ϕ est diagonalisable.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1416]

6 Diagonalisation - en théorie

Exercice 32 ★ Diagonalisation des endomorphismes de rang 1 –

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

- On suppose que f est diagonalisable. Démontrer que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
- Réciproquement, on suppose que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul, et on note $u \in E$ tel que $\text{Im}(f) = \text{vect}(u)$.

Démontrer que u est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. En déduire que f est diagonalisable.

- Démontrer que u est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle.
- En déduire que f est diagonalisable.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2532]

Exercice 33 ★★ $f \circ g$ et $g \circ f$ diagonalisables ? –

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe \mathcal{B} une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

- Dans cette question, on suppose f et g inversibles.

En utilisant $\det(BAB - \lambda B)$, démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ . Démontrer les inclusions

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$

Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ? Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.

- En utilisant $\det(BAB - \lambda B)$, démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

3. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ . Démontrer les inclusions

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$

4. Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ?

5. Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.

6. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.

Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que

$$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$

Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$? Dédurre de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres. Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

7. Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.

8. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que

$$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$

Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?

9. Dédurre de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

10. Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1418]

Exercice 34 ★★★★★ Diagonalisation des matrices symétriques 2x2 –

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que A est diagonalisable.

2. Le résultat persiste-t-il si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2645]

Exercice 35 ★★★★★ Base de matrices diagonalisables... –

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans \mathbb{R} ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1417]

Exercice 36 ★★★★★ Matrices diagonalisables de rang 1 –

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3399]

Exercice 37 ★★★★★ Diagonalisation simultanée –

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonales.

2. Plus généralement, soit u_1, \dots, u_m une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux, $m \geq 1$. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1424]

Exercice 38 ★★★★★ Dimension du commutant –

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n . On note \mathcal{C}_f le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f .

1. Démontrer que $g \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g .

2. En déduire que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \text{sp}(f)} \text{mult}(\lambda)^2$, où $\text{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ .

3. On suppose en outre que les valeurs propres de f sont simples. Démontrer que (Id, f, \dots, f^{n-1}) est une base de \mathcal{C}_f .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1429]

7 Autres réductions - Matrices semblables

Exercice 39 ★★★★★ Endomorphisme cyclique –

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n supérieure ou égale à 2. On suppose que E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u .

1. u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
3. Montrer que la matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est indépendante du choix de x .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1430]

Exercice 40 ★★★★★ $A^2 = 0$ –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle tel que $A^2 = 0$ et soit r le rang de A . Démontrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1431]

Exercice 41 ★★★★★ Réduction des endomorphismes anti-involutifs –

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -Id$.

1. Donner un exemple de tel endomorphisme sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que, pour tout x de E , $\text{vect}(x, f(x))$ est stable par f .
4. En déduire que si $\dim E = 2n$, il existe des vecteurs (e_1, \dots, e_n) tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ forme une base de E . Quelle est la matrice de f dans cette base ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1428]

Exercice 42 ★★★★★ Semblable sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} ? –

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Démontrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $QAQ^{-1} = B$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1433]

Exercice 43 ★★★★★ Classes de similitude des endomorphismes involutifs –

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est involutif si $u^2 = Id_E$.

1. Démontrer que si u est involutif, il existe des espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$, $u(x) = x$ pour tout $x \in F$ et $u(x) = -x$ pour tout $x \in G$. Que vaut la trace de u en fonction de $\dim(F)$ et de $\dim(G)$?
2. Soit u et v deux endomorphismes involutifs de E . Démontrer que u et v sont semblables si et seulement si ils ont même trace.
3. Combien y-a-t-il de classes de similitudes dans l'ensemble des endomorphismes involutifs de E ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2520]

Exercice 44 ★★★★★ Endomorphisme de trace nulle –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1432]

Indication pour l'exercice 1 ▲

C'est une question d'équation différentielle, à revoir de toute urgence si vous ne savez pas traiter l'exercice !

Indication pour l'exercice 2 ▲

Écrire $(v_n) = \lambda(u_n)$. On obtient une relation de récurrence sur les (u_n) . On séparera alors les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 1/2$ des autres.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Pour le sens direct, il "suffit" d'écrire ce que l'on veut. Pour la réciproque, penser à considérer des automorphismes...

2. Partir de $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Pour la réciproque, vérifier que f et g commutent sur chaque sous-espace propre de f .

Indication pour l'exercice 5 ▲

Considérer la restriction de v à un sous-espace propre de u .

Indication pour l'exercice 6 ▲

Calculer le polynôme caractéristique, le factoriser, puis chercher les sous-espaces propres.

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .

2. Si $m \neq 1$, $m \neq 2$, appliquer un théorème du cours. Si $m = 1$ ou $m = 2$, chercher la dimension de l'espace propre associé.

3. Diagonaliser A et écrire $A^k = PD^kP^{-1}$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

- 1.
 2. Calculer le polynôme caractéristique de J .
 3. Utiliser le résultat de la première question et le fait que $J = PDP^{-1}$.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

Dans cet exercice, la trace et le rang pourront être utiles !

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Calculer J^2 puis faire le produit par blocs.
 2. Remarquer que $A^3 - A = 0$.
 3. Quel est le rang de A ?
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Il n'y a plus qu'une seule équation !
 - 2.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .
 2. Remarquer que $E_i = \text{vect}(e_i, e_{2p+1-i})$ est stable par A .
-

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Extraire une matrice 2×2 inversible.
 2. Utiliser la structure de la matrice. Par exemple, les sommes des coefficients sur chaque ligne sont égales...
-

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Retirer la première colonne à la dernière.
 2. Procéder par récurrence sur n .
 3. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
-

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Développer suivant la première colonne, puis suivant la première ligne.
 2. Par récurrence ?
 3. Démontrer que P_n admet n racines distinctes.
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

Commencer par calculer le rang de A .

Indication pour l'exercice 17 ▲

Résoudre $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et trouver quelles sont les valeurs de λ possibles.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Calculer le polynôme caractéristique...

Indication pour l'exercice 19 ▲

Calculer le polynôme caractéristique de A . A est semblable à une matrice diagonale D . Trouver d'abord une matrice M telle que $M^3 = D$.

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Méthode usuelle. Calcul du polynôme caractéristique.
 2. Utiliser la relation $A = PDP^{-1}$ qui donne $A^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence.
 3. On a $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence, $X_n = A^n X_0$ ce qui permet de calculer u_n , v_n et w_n .
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

- 1.
 2. Si $A = PDP^{-1}$, commencer par déterminer toutes les matrices qui commutent avec D , puis remarquer que si M commute avec A , alors $P^{-1}MP$ commute avec D .
-

Indication pour l'exercice 22 ▲

L'une est diagonalisable, pas l'autre...

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Calculer le polynôme caractéristique.
-

2. Calculer d'abord J^2, J^3, \dots
 3. Écrire que $J = PDP^{-1}$ et en déduire, à l'aide du polynôme de la question précédente, une matrice diagonale à laquelle A est semblable.
-

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Calculer le polynôme caractéristique de f .
 2. Résoudre l'équation $(A - I)u = 0$, avec $u = (x, y, z)$.
 3. Calcul direct.
 4. Idem !
 5. Procéder par récurrence sur k .
 6. Écrire $A = QTQ^{-1}$, et utiliser la question précédente.
-

Indication pour l'exercice 25 ▲

- 1.
 2. Quelle est la seule valeur propre de f ? Que se passerait-il si f était diagonalisable ?
 3. Il faut (bien sûr !) considérer la base (u_1, u_2, e_2) où (u_1, u_2) est une base de $\ker(g)$.
 - 4.
 - 5.
 6. Il faut (bien sûr !) considérer la base (u_1, u_2, e_2) où (u_1, u_2) est une base de $\ker(g)$.
 - 7.
 8. Écrire $A = 2I_3 + B$ et utiliser la formule du binôme de Newton.
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

Calculer le polynôme caractéristique de ϕ en écrivant sa matrice dans la base canonique de E .

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. Il faut vérifier que le degré de $f(P)$ est bien inférieur ou égal à n .
 2. Commencer par calculer $P'_k(X)$ en factorisant le plus possible...
 3. La question précédente nous donne beaucoup de valeurs propres !
 4. f est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f .
-

Indication pour l'exercice 28 ▲

L est une symétrie. On pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Récurrence.
 - 2.
 3. A^k est un vecteur propre !
 4. Nombre fini de valeurs propres !
-

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. Considérer par exemple un projecteur sur $E_\lambda(f)$.
 2. Avec la question précédente, on doit être capable de déterminer la dimension de $E_\lambda(\phi)$. Il doit alors être facile de la somme des dimensions des $E_\lambda(\phi)$ vaut la dimension de $\mathcal{L}(E)$.
-

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. Utiliser l'unicité dans la division euclidienne.
 2. Que se passe-t-il sur P si $AP = BQ$, sachant que A et B sont premiers entre eux ?
 3. La valeur propre associée est $A(x_k)$.
-

4. Utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Indication pour l'exercice 32 ▲

1. Utiliser le fait que f admet une valeur propre non nulle.
 2. Si $f(u) = 0$, alors $f \circ f = 0$.
 3. Si $f(u) = 0$, alors $f \circ f = 0$.
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. Factoriser par B (une fois à droite, une fois à gauche).
Un isomorphisme préserve les dimensions. Raisonner sur la somme des dimensions des espaces propres.
 2. Factoriser par B (une fois à droite, une fois à gauche).
 - 3.
 4. Un isomorphisme préserve les dimensions.
 5. Raisonner sur la somme des dimensions des espaces propres.
 6. Utiliser le déterminant.
Raisonner par contraposée. Prendre un exemple en dimension 2, avec $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
 7. Utiliser le déterminant.
 - 8.
 9. Raisonner par contraposée.
 10. Prendre un exemple en dimension 2, avec $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
-

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. Raisonner à partir du polynôme caractéristique de A .
 2. Donner un contre-exemple, toujours en s'aidant du polynôme caractéristique de A .
-

Indication pour l'exercice 35 ▲

Essayer d'abord de trouver une telle base avec $n = 2$. On rappelle qu'une matrice triangulaire dont tous les éléments sur la diagonale sont distincts est diagonalisable.

Indication pour l'exercice 36 ▲

Quel est l'ordre de la valeur propre nulle ? Quel est le polynôme caractéristique de A ?

Indication pour l'exercice 37 ▲

Pour la question 1, réduire v "par blocs" (sur chaque sous-espace propre de u). Pour la question 2, procéder par récurrence.

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Pour la réciproque, vérifier que f et g commutent sur chaque sous-espace propre de f .
 2. Construire un isomorphisme entre \mathcal{C}_f et $\prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f))$ où les λ_i sont les valeurs propres de f . On pourra considérer les restrictions de g à chacun des sous-espaces propres de f .
 3. Il suffit de prouver que (Id, f, \dots, f^{n-1}) est une famille libre.
-

Indication pour l'exercice 39 ▲

1. Un vecteur propre engendre un sous-espace stable.
 2. Si la famille était liée, il y aurait un sous-espace stable non trivial...
 3. Démontrer d'abord que la matrice est la même en remplaçant x par $u^i(x)$.
-

Indication pour l'exercice 40 ▲

Compléter une base de $\text{Im}(f)$ en une base de $\text{ker}(f)$, puis en une base de E .

Indication pour l'exercice 41 ▲

-
1. Définir l'endomorphisme sur une base.
 2. Que doit vérifier une valeur propre ? Que dire d'un polynôme de degré impair ?
 - 3.
 4. Procéder de proche en proche.
-

Indication pour l'exercice 42 ▲

Écrire la relation $PA = BP$ et travailler à partir des parties réelles et imaginaires de P .

Indication pour l'exercice 43 ▲

-
1. C'est le lemme de décomposition des noyaux.
 2. En introduisant F_u, F_v, G_u et G_v , commencer par démontrer que $\dim(F_u) = \dim(F_v)$.
 3. Combien de valeurs différentes peut prendre la trace d'un endomorphisme involutif.
-

Indication pour l'exercice 44 ▲

Raisonner par récurrence. Commencer par trouver un vecteur tel que Ax ne soit pas colinéaire à x .

Correction de l'exercice 1 ▲

f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f' = \lambda f$. f est donc un multiple de la fonction $x \mapsto \exp(\lambda x)$, et la réciproque est vraie. Autrement dit, tous les réels sont des valeurs propres pour D , et $\exp(\lambda x)$ est une base de l'espace propre associé à λ .

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit (u_n) un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Alors on a $u_0 = \lambda u_0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \iff (1 - 2\lambda)u_n = -u_{n-1}.$$

On distingue alors trois cas :

Si $\lambda = 1$, alors on a $u_0 = u_0$ (qui n'implique plus rien sur u_0), puis pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = u_{n-1}$. Réciproquement, toute suite constante et non-nulle est bien vecteur propre de ϕ pour la valeur propre 1. On en déduit que 1 est une valeur propre de ϕ dont l'espace propre associé est constitué par les suites constantes. Si $\lambda = 1/2$, alors l'équation $u_0 = \lambda u_0$ donne $u_0 = 0$ et on a aussi, pour tout $n \geq 1$, $u_{n-1} = 0$ ce qui implique que (u_n) est la suite nulle et donc $1/2$ n'est pas valeur propre de ϕ . Dans tous les autres cas, alors $u_0 = \lambda u_0$ donne encore $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{2\lambda - 1} u_{n-1}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est là-encore la suite nulle, et λ n'est pas valeur propre.

En conclusion, la seule valeur propre est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Commençons par prouver que $\text{Im}(u)$ est stable par v . Soit $y \in \text{Im}(u)$, $y = u(x)$ avec $x \in E$. Alors $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}(u)$. Prenons ensuite $z \in \ker(u)$. Alors $u(z) = 0$ et $u(v(z)) = v(u(z)) = 0$ et donc $v(z) \in \ker(u)$. La réciproque est fautive. En effet, si u et v sont tous les deux des automorphismes, il est clair que $\ker(u) = \{0\}$ et $\text{Im}(u) = E$ sont stables car v est bijective. Mais il n'y a aucune raison pour que u et v commutent. Donnons un exemple, en prenant pour u et v les automorphismes de \mathbb{R}^2 dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $AB \neq BA$.

2. Puisque u est un projecteur, on sait que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$. Prenons $x \in E$ et écrivons le $x = y + z$ dans cette décomposition. Alors

$$u(v(x)) = u(v(y)) + u(v(z)).$$

Mais $v(y) \in \ker(u)$ et donc $u(v(y)) = 0$ et $v(z) \in \text{Im}(u)$ et donc $u(v(z)) = v(z)$ (rappelons que u est la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$). D'autre part,

$$v(u(x)) = v(0 + z) = v(z).$$

On a donc bien $u \circ v = v \circ u$.

Correction de l'exercice 4 ▲

D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P , en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g . Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f . Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi

$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$

Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f . Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i , où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

Correction de l'exercice 5 ▲

Rappelons que tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie admet une valeur propre, puisque son polynôme caractéristique est scindé. Appliquons ceci à u qui est un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie E : il admet une valeur propre λ . Considérons E_λ le sous-espace propre associé. Il est stable par v . Soit w la restriction de v à E_λ . Alors w est un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie E_λ et donc w admet un vecteur propre $x \in E_\lambda$. C'est un vecteur propre de v (puisque w est une restriction de v), et c'est un vecteur propre de u puisqu'il est élément de E_λ .

Correction de l'exercice 6 ▲

Procédons d'abord avec A . Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(X) = (X - 1)(X - 2)(X + 4).$$

Il est scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable. Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1, on pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on résout $Au = u$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x = y = z$ et un vecteur propre est donc donné par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On fait de même pour

2 et -4 , et on trouve respectivement $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice A s'écrit donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poursuivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_B(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4.$$

1 est racine évidente, on factorise par $X - 1$ et finalement on trouve

$$\chi_B(X) = (X - 1)(X - 2)^2.$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant, avec les mêmes notations, $Bu = u$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ces trois équations se ramènent à $2x - 3y - 2z = 0$, qui est l'équation d'un plan de ³. Le sous-espace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice B

s'écrit donc $B = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X) = -(1-X)^2(2-X)$. On procède exactement comme précédemment, et on trouve que (u_1, u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1, avec $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2, avec $u_3 = (0, 0, 1)$. Ainsi, C s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On calcule le polynôme caractéristique de A . On a

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \stackrel{=C_1+C_2 \rightarrow C_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &\stackrel{=L_2-L_1 \rightarrow L_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-m). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc 1, 2 et m . En particulier, si $m = 1$ ou 2, f n'admet que deux valeurs propres.

2. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable. Si $m = 1$, le polynôme caractéristique de f est $(X-1)^2(X-2)$. Dans ce cas, 2 est valeur propre de multiplicité 1 de f et 1 est valeur propre de multiplicité 2. L'endomorphisme f est donc diagonalisable si

et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Cherchons ce sous-espace (rappelons qu'on a $m = 1$). Pour $u = (x, y, z)$, on a

$$f(u) = u \iff \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

Une base de $\ker(f - I)$ est donc donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$. L'espace est de dimension 1 $\neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable. Supposons maintenant $m = 2$. Cette fois, c'est 1 qui est valeur propre de f de multiplicité 1 et 2 qui est valeur propre de multiplicité 2. On doit donc calculer la dimension de $\ker(f - 2I)$. On a, pour $u = (x, y, z)$:

$$f(u) = 2u \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x \end{cases}$$

Une base de $\ker(f - 2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$. En particulier, $\ker(f - 2I)$ est de dimension 2 et f est diagonalisable.

3. On va commencer par diagonaliser f . On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Pour la valeur propre 1 (attention, on travaille cette fois avec $m = 2$), on a, pour $u = (x, y, z)$:

$$f(u) = u \iff \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

Une base de $\ker(f - I)$ est donc donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$. Notons $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (1, 0, 1)$. Alors (u, v, w) est une base de vecteurs propres de f et dans cette base, la matrice de f est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base (u, v, w) . La matrice P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $A = PDP^{-1}$. On doit calculer P^{-1} . On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De $A = PDP^{-1}$, on déduit facilement par récurrence $A^k = PD^kP^{-1}$. Mais puisque D est diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent donne finalement

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

1. On trouve sans difficultés que $J^2 = M(0, 0, 1)$, puis que $M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

2. Calculons le polynôme caractéristique de J :

$$\begin{aligned}\chi_J(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X & -1 \end{vmatrix} \\ &= X^3 - 1.\end{aligned}$$

Les racines du polynôme $X^3 - 1$ sont $1, j, j^2$ avec $j = e^{2i\pi/3}$. Ainsi, le polynôme caractéristique de J est scindé à racines simples : J est diagonalisable et ses valeurs propres sont $1, j$ et j^2 .

3. Il faut mieux éviter de calculer le polynôme caractéristique de $M(a, b, c)$ et plutôt utiliser le résultat des questions précédentes. En effet, on peut écrire que $J = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1, j$ et j^2 . On a alors

$$\begin{aligned}M(a, b, c) &= aI_3 + bJ + cJ^2 \\ &= P(aI_3)P^{-1} + P(bD)P^{-1} + P(cD^2)P^{-1} \\ &= P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}.\end{aligned}$$

Posons $D(a, b, c) = aI_3 + bD + cD^2$, c'est-à-dire que $D(a, b, c)$ est la matrice diagonale

$$D(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont $a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Toutes les colonnes étant identiques, et la matrice n'étant pas la matrice nulle, elle est de rang 1. Autrement dit, 0 est valeur propre de A et la dimension de l'espace propre associé à 0 est égale à 3. Ainsi, on en déduit que X^3 divise le polynôme caractéristique de A . Ce polynôme étant de degré 4 et étant divisible par X^3 , il se factorise en $X^3(X - \lambda)$. En particulier, il est scindé. La somme des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité étant égal à la trace de la matrice, on en déduit que la dernière valeur propre est $\lambda = 10 \neq 0$. Ainsi, 10 est valeur propre de A , et la dimension de l'espace propre associé est au moins égale à 1. Puisque $3 + 1 \geq 4$, on en déduit que A est diagonalisable.

2. Le même raisonnement peut être repris dans le cas général. 0 est valeur propre, et l'espace propre associé est de dimension $n - 1$. Le polynôme caractéristique est scindé, et se factorise en $X^{n-1}(X - \lambda)$. On a alors λ qui vaut la trace de A . Si la trace de A n'est pas nulle, alors on raisonne comme à la question précédente pour déduire que A est diagonalisable. Si la trace de A est nulle, alors $\lambda = 0$ et 0 est racine du polynôme caractéristique de degré n alors que la dimension de l'espace propre associé ne vaut que $n - 1$. Donc A n'est pas diagonalisable. En conclusion, une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. On commence par remarquer que $J^2 = J$ puis, en faisant le produit par blocs :

$$A^2 = \left(\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & J \end{array} \right) \text{ et } A^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array} \right) = A.$$

2. On remarque que $A^3 = A$. Posons $P(X) = X^3 - X$. Alors P est un polynôme annulateur pour A . De plus, P se factorise en $P(X) = X(X - 1)(X + 1)$: il est donc scindé à racines simples. Donc A est diagonalisable.

3. Les valeurs propres de A sont contenues dans les racines de tout polynôme annulateur de A . Elles sont donc à chercher parmi 0, 1 et -1 . De plus, on vérifie facilement que A est de rang 2 (par exemple, parce que

les deux premières et les deux dernières colonnes sont identiques). Ainsi, $\dim(\ker(A)) = 4 - 2 = 2$. Cherchons la dimension du sous-espace propre associé à 1. Posons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Alors on vérifie facilement que

$$Au = u \iff x = y = z = t.$$

Ainsi, $E(1)$ est de dimension 1, une base de $E(1)$ étant donnée par $((1, 1, 1, 1))$. De même, on a

$$Au = -u \iff x = y = -z = -t,$$

ce qui prouve que $E(-1)$ est de dimension 1, une base de $E(-1)$ étant donnée par $(1, 1, -1, -1)$.

4. Puisque A est diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre (en tant que racine du polynôme caractéristique) et la dimension du sous-espace vectoriel associé coïncident. On a donc $C_A(X) = X^2(X-1)(X+1)$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Posons $a = \sum_{j=1}^n x_j$. Alors $f(u) = a \sum_{i=1}^n e_i$. Autrement dit,

$$u \in \ker(f) \iff a = 0 \iff x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0.$$

On en déduit que $\ker(f)$ est de dimension $n - 1$, une base de $\ker(f)$ étant donné par les vecteurs (u_1, \dots, u_{n-1}) avec $u_i = e_i - e_n$. On peut aussi remarquer que le rang de la matrice A vaut 1, puisque toutes ses colonnes sont identiques, et donc par le théorème du rang que la dimension de son noyau vaut $n - 1$.

2. On vérifie facilement que $f(v) = nv$.

3. On a donc prouvé que 0 est valeur propre de f et que la dimension de l'espace propre associé vaut $n - 1$, puis que n est valeur propre de f et que la dimension de l'espace propre associé est au moins égale à 1. La somme des dimensions des espaces propres étant inférieure ou égale à n , on en déduit que la dimension de l'espace propre associé à n vaut 1. L'endomorphisme f est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et n , les sous-espaces propres associés étant respectivement de dimension $n - 1$ et 1.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - ab$. Si $ab > 0$, alors il se factorise en $(X - \sqrt{ab})(X + \sqrt{ab})$. Autrement dit, A admet deux valeurs propres distinctes, et donc A est diagonalisable. Si $ab = 0$, alors si $a = b = 0$, A est déjà diagonale. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou symétriquement si $b = 0$ et $a \neq 0$), la seule valeur propre de A est 0, et donc si A était diagonalisable, elle serait égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable. Enfin, si $ab < 0$, A n'admet pas de valeurs propres, et donc A n'est pas diagonalisable. En résumé, on a prouvé que A est diagonalisable si et seulement si $a = b = 0$ ou $ab > 0$.

2. Soit (e_1, \dots, e_{2p}) la base canonique de \mathbb{R}^{2p} et soit $E_i = \text{vect}(e_i, e_{2p+1-i})$, pour $1 \leq i \leq p$. On a $Ae_i = \alpha_{2p+1-i}e_{2p+1-i}$ et $Ae_{2p+1-i} = \alpha_i e_i$. Chaque sous-espace E_i est donc stable par A , et de plus $\mathbb{R}^{2p} = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$. A est donc diagonalisable si et seulement si $A|_{E_i}$ est diagonalisable pour chaque i . Mais la matrice de la restriction de A à E_i est exactement une matrice 2×2 comme celle de la question précédente, avec $b = \alpha_{2p+1-i}$ et $a = \alpha_i$. On conclut finalement que :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = \alpha_{2p+1-i} = 0 \text{ ou } \alpha_i \alpha_{2p+1-i} > 0.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Puisque la matrice n'admet que deux colonnes distinctes, elle est de rang au plus 2. De plus, la matrice extraite $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est inversible puisque son déterminant est $a^2 - b^2 \neq 0$. Le rang de la matrice est 2 ce qui fait, d'après le théorème du rang, que la dimension du noyau de A est $2n - 2$. Ainsi, 0 est valeur propre de A de multiplicité $2n - 2$.

2. Utilisons la structure de la matrice. On remarque que les sommes des coefficients sur chaque ligne sont égales, et égales à $n(a+b)$. Ceci signifie que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $n(a+b)$. De même, en faisant cette fois des sommes "alternées", on remarque que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $n(a-b)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, et $a+b$ comme $a-b$ sont non nuls. On a donc trouvé les deux vecteurs propres manquants, et A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. On calcule le polynôme caractéristique de M_n en retirant la première colonne à la dernière, puis en développant suivant la dernière colonne. On trouve :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & \dots & \dots & -X \\ -1 & X-2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & \dots & X-(n-1) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n X \begin{vmatrix} -1 & X-2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & X-3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & X-(n-1) \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \end{vmatrix} + (X-(n-1))P_{n-1}(X). \end{aligned}$$

Pour calculer l'avant-dernier déterminant qui apparaît, on retranche l'avant-dernière ligne à la dernière, puis la ligne $n-3$ à la ligne $n-2$, etc. jusqu'à retirer la ligne 1 à la ligne 2. On trouve :

$$\begin{vmatrix} -1 & X-2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & X-3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & X-(n-1) \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & * & \dots & * \\ 0 & 1-X & * & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & (n-2)-X \end{vmatrix}.$$

La matrice que l'on obtient est triangulaire supérieure, son déterminant est le produit des termes diagonaux, et on obtient

$$\begin{aligned} P_n(X) &= (X-(n-1))P_{n-1}(X) + (-1)^{n+1}X(1-X)\cdots(n-2-X) \\ &= (X-(n-1))P_{n-1}(X) - X(X-1)\cdots(X-(n-2)). \end{aligned}$$

2. On procède par récurrence sur n . Le résultat est vrai pour $n=1$, puisque $P_1(X) = X-1$ et $-P_n(0) > 0$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et démontrons-la au rang n . Alors, pour $k \leq n-2$, d'après la formule précédente, on a

$$(-1)^{n+k}P_n(k) = (-1)^{n+k}P_{n-1}(k) \times (k-(n-1)) + 0 = (n-1-k) \times (-1)^{n-1+k}P_{n-1}(k) > 0.$$

Pour $k = n - 1$, alors

$$(-1)^{n+k}P_n(n-1) = (n-1)! > 0.$$

3. Pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$, le résultat de la question précédente nous dit que $P_n(k)$ et $P_n(k+1)$ sont de signe contraire. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n possède au moins une racine dans l'intervalle $]k, k+1[$, ce qui nous donne $n-1$ racines distinctes. De plus, la limite de P_n en $+\infty$ est $+\infty$ et

$$P_n(n-1) = -(-1)^{n+n-1}P_n(n-1) < 0.$$

Donc, toujours par le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve une racine dans l'intervalle $[n-1, +\infty[$. On a trouvé n racines distinctes pour le polynôme caractéristique de M_n , qui est une matrice d'ordre n . Ainsi, M_n est diagonalisable, et on a trouvé toutes les valeurs propres de M_n . Il y en a bien exactement une dans chaque intervalle proposé.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. On développe le déterminant suivant la première colonne. On trouve

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & x & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

On développe ensuite suivant la première ligne et on trouve le résultat demandé. On a par ailleurs $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$.

2. On va procéder par récurrence double. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ et pour $n = 2$ car

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) \\ &= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)((2\cos\alpha)^2 - 1). \end{aligned}$$

Si le résultat est vrai aux rang $n-2$ et $n-1$, alors en utilisant le résultat de la première question, on a

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)P_n(x) &= (2\cos\alpha)\sin(\alpha)P_{n-1}(x) - \sin(\alpha)P_{n-2}(x) \\ &= 2\cos\alpha\sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha) \\ &= \sin((n+1)\alpha) + \sin((n-1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha) \\ &= \sin((n+1)\alpha) \end{aligned}$$

ce qui prouve que le résultat est encore vrai au rang n .

3. L'équation $\sin((n+1)\alpha) = 0$ admet n racines dans l'intervalle $]0, \pi[$ qui sont les réels $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$. Par bijectivité de la fonction \cos sur l'intervalle $]0, \pi[$, les n réels $x_k = 2\cos(\alpha_k)$, $k = 1, \dots, n$ sont distincts et ce sont des racines de P_n . P_n , qui est de degré n , et donc scindé à racines simples. Puisqu'il s'agit du polynôme caractéristique de A_n , on en déduit que A_n est diagonalisable.

Correction de l'exercice 16 ▲

On peut commencer par calculer le rang de A . Il est facile de vérifier qu'il est égal à 2. En effet, en enlevant la dernière colonne à la première colonne, et la deuxième colonne aux colonnes $3, \dots, n-1$, on trouve que le rang de A est égal au rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette dernière matrice est clairement égal à 2. Ainsi, la dimension de $\ker A$ est égale à $n - 2$. Il suffit alors de vérifier que A admet deux valeurs propres distinctes, et différentes de 0, pour prouver que A est diagonalisable. Pour cela, on va calculer le polynôme caractéristique de A . En réalisant les mêmes opérations élémentaires que pour le calcul du rang, on trouve

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -X & X & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X & 1 & 0 & \dots & 1-X \end{vmatrix}.$$

On ajoute ensuite la dernière ligne à la première, puis les lignes $3, \dots, n-1$ à la deuxième ligne. On peut alors finir le calcul du polynôme caractéristique (en développant par rapport aux colonnes ne contenant plus qu'un terme non nul) :

$$\begin{aligned} C_A(X) &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 2-X \\ 0 & -X & 0 & \dots & n-2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X & 1 & 0 & \dots & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} X^{n-2} \begin{vmatrix} 2 & 2-X \\ -X & n-2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} X^{n-2} (-X^2 + 2X + 2n - 4). \end{aligned}$$

Le polynôme $-X^2 + 2X + 2n - 4$ admet deux racines distinctes et différentes de zéro (son discriminant vaut $8n - 12$, il est strictement positif car on a supposé $n \geq 4$). La matrice A est donc diagonalisable. Il est aussi possible de remarquer, si l'on connaît le résultat, que la matrice A est diagonalisable car c'est une matrice symétrique réelle.

Correction de l'exercice 17 ▲

Dans la suite, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on notera $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ l'espace propre associé à λ pour A et $F_\lambda = \ker(B - \lambda I_{2n})$ l'espace propre associé à λ pour B . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors on a :

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} Ay = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} Ay = \lambda^2 y \\ x = \lambda y \end{cases}$$

Ainsi, λ est valeur propre de B si et seulement si λ^2 est valeur propre de A , et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B pour la valeur propre λ si et seulement si $x = \lambda y$ et y est vecteur propre de A pour la valeur propre λ^2 . Soit $\mu = \lambda^2 \in \mathbb{C}$. Si (y_1, \dots, y_k) est une base de E_μ , alors en posant $X_i = \begin{pmatrix} \lambda y_i \\ y_i \end{pmatrix}$, (X_1, \dots, X_k) est une base de F_λ . Puisque A est diagonalisable, on sait que

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\mu_i}) = n,$$

où μ_1, \dots, μ_p sont les valeurs propres de A . Si $\mu_i \neq 0$ pour tout i , chaque μ_i admet deux racines carrées complexes distinctes λ_i, λ'_i , et on a

$$\sum_{i=1}^p \dim(F_{\lambda_i}) + \sum_{i=1}^p \dim(F_{\lambda'_i}) = 2 \sum_{i=1}^p \dim(E_{\mu_i}) = 2n,$$

et donc B est diagonalisable. Au contraire, si $\mu_1 = 0$, alors on obtient une seule racine carrée, qui vaut 0, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de B vaut

$$\dim(E_0) + 2 \sum_{i=2}^p \dim(E_{\mu_i}) = 2n - \dim(E_0) < 2n.$$

On en conclut que B est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A .

Correction de l'exercice 18 ▲

Le calcul du polynôme caractéristique ne pose pas de problèmes, et on trouve, sous forme factorisée, $\chi_A(x) = (x-2)(x-4)^2$. On ne peut pas conclure directement que A est diagonalisable, il faut déterminer une base des sous-espaces propres associés. Pour la valeur propre 2, on résout l'équation $AX = 2X$ avec

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve le système

$$\begin{cases} x = x \\ y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cherchons ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 4. On doit résoudre $AX = 4X$

et on trouve cette fois le système :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x \end{cases}$$

Une base de l'espace propre associé à la valeur propre 4 est donc donné par (u_2, u_3) , avec $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres

correspondantes, donc A est diagonalisable. Plus précisément on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. D^n est tout simplement égale à

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Après un petit calcul, on trouve que

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit finalement que

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \cdot 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 19 ▲

On calcule le polynôme caractéristique de A et on trouve

$$P_A(X) = (X-1)(X+8).$$

Les racines du polynôme caractéristique de A sont toutes dans \mathbb{R} et toutes distinctes. A est donc diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Pour prouver l'existence d'une matrice B telle que $B^3 = A$, l'idée est de d'abord faire la même chose avec D . Mais si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

alors on a $M^3 = D$. Posons $B = PMP^{-1}$. Alors

$$B^3 = PM^3P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Remarquons que l'énoncé de l'exercice ne demande pas de calculer B ...

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On calcule le polynôme caractéristique de A . On trouve

$$P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5).$$

$A \in M_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres, $-1, 2, 5$: A est donc diagonalisable. On cherche les sous-espaces propres associés. Pour -1 , on a, pour $X = (x, y, z)$,

$$AX = -X \iff \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 . On fait de même avec 2 , et on trouve (par exemple) le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5 , et on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Ainsi, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

on a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $A = PDP^{-1}$, ce qui entraîne par récurrence $A^n = PD^nP^{-1}$. D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n . En effectuant les deux produits de matrice, on trouve finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

3. On a $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence, on a $X_n = A^n X_0$. Grâce au calcul de A^n effectué à la question précédente, on trouve

$$\begin{cases} u_n = (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ v_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})v_0 \\ w_n = (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2 \cdot 5^n)v_0 + 5^n w_0. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1. La diagonalisation de A ne pose pas de problèmes. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Il est scindé à racines simples, et donc A est diagonalisable. En particulier, il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. On va commencer par déterminer les matrices $N = (n_{i,j})$ qui commutent avec D . On remarque que

$$ND = \begin{pmatrix} 1n_{1,1} & 2n_{1,2} & 3n_{1,3} \\ 1n_{2,1} & 2n_{2,2} & 3n_{2,3} \\ 1n_{3,1} & 2n_{3,2} & 3n_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } DN = \begin{pmatrix} 1n_{1,1} & 1n_{1,2} & 1n_{1,3} \\ 2n_{2,1} & 2n_{2,2} & 2n_{2,3} \\ 3n_{3,1} & 3n_{3,2} & 3n_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Pour que $ND = DN$, il est donc nécessaire et suffisant que N soit une matrice diagonale,

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on remarque que si M commute avec A , alors

$$PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP)$$

et donc M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D , donc si et seulement si cette matrice est diagonale. Après calcul de P et de P^{-1} , on trouve que M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & \frac{-a+c}{2} \\ 2c-2b & -2b+2c & c \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

On vérifie facilement que A et B ont le même polynôme caractéristique $(1-x)(2-x)^2$. Cherchons les sous-espaces propres associés à la valeur propre 2. Pour la matrice A , avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \\ z = z \end{cases}.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 pour A est donc la droite vectorielle engendrée par $(2, -3, 1)$. En particulier, A n'est pas diagonalisable. Pour B maintenant, on a

$$BX = 2X \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -y \end{cases}.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan engendré par les deux vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, -1)$. En particulier, la dimension de ce sous-espace propre est égale à la multiplicité de 2 comme racine du polynôme caractéristique. Maintenant, ceci entraîne que A et B ne sont pas semblables. Si c'était le cas, alors la relation être semblable étant transitive, A serait semblable à une matrice diagonale, donc diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. On calcule le polynôme caractéristique de J . En développant par rapport à la première ligne, on trouve

$$\begin{aligned}\chi_J(x) &= \det(xI_n - J) \\ &= x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Le premier déterminant qui apparaît est celui d'une matrice triangulaire supérieure, son calcul ne pose pas de difficultés. Pour calculer le second, on développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} &= (-1)^{n-2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1+1} \times (-1) \times (-1)^{n-2} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que

$$\chi_J(x) = x^n - 1.$$

Ce polynôme est scindé à racines simples sur \mathbb{C} , ses racines étant les racines n -ièmes de l'unité $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, \dots, n-1$. Ainsi, J est diagonalisable, et il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $J = PDP^{-1}$, avec D la matrice dont les éléments diagonaux sont les ω_k .

2. On calcule d'abord J^2, J^3 , etc... et on observe que la diagonale de 1 se décale vers la droite. On en déduit alors que

$$A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = Q(J)$$

où Q est le polynôme $Q(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$.

3. On a $P^{-1}AP = Q(D)$ qui est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $Q(\omega_k)$, et donc

$$\det(A) = \det(Q(D)) = \prod_{k=0}^{n-1} (a_0 + a_1 \omega_k + \dots + a_{n-1} \omega_k^{n-1}).$$

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On calcule le polynôme caractéristique de f . On trouve $P_f(X) = (1-X)^2(2-X)$. Puisqu'il a toutes ses racines dans \mathbb{R} , l'endomorphisme f est trigonalisable.

2. Pour $u = (x, y, z)$, on a

$$f(u) = u \iff \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

Une base de $\ker(f - I)$ est donc donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$.

3. On a $f(v) = (1, 1, 1)$ d'où $f(v) - v = u$.

4. On cherche l'espace propre associé à la valeur propre 2. On a, pour $w = (x, y, z)$,

$$f(w) = 2w \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

Le vecteur $w = (1, 0, 1)$ est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. On vérifie facilement que la famille (u, v, w) est une famille libre de \mathbb{R}^3 , donc une base. La matrice de f dans cette base est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. On montre par récurrence sur k que $f^k(v) = v + ku$. En effet, c'est vrai pour $k = 1$ et si c'est vrai au rang k , alors

$$f^{k+1}(v) = f(v + ku) = f(v) + kf(u) = v + u + ku = v + (k+1)u.$$

Puisque $f^k(u) = u$ et $f^k(w) = 2^k w$, on en déduit

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

6. Soit Q la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base (u, v, w) . Q est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a la relation $A = QTQ^{-1}$. Par récurrence, on montre que $A^k = QT^kQ^{-1}$. Il reste à calculer Q^{-1} et à utiliser le résultat de la question précédente. On trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k - k & k + 1 - 2^k & k \\ -k & k + 1 & k \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 25 ▲

1. On vérifie facilement que $C_A(X) = (X - 2)^3$. Il est scindé, donc f est trigonalisable.

2. D'après la question précédente, 2 est la seule valeur propre de f (de A). Si f (ou A) était diagonalisable, A serait semblable à $2I_3$: il existerait $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P(2I_3)P^{-1}$ ce qui entraîne $A = 2I_3$, ce qui n'est pas le cas !

3. On trouve $B^2 = 0$. Soit $u = (x, y, z)$. Alors $g(u) = 0$ si et seulement si

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = z \end{cases}$$

Posons $u_1 = e_1 + 2e_2$ et $u_2 = e_3$. Alors (u_1, u_2) est une base de $\ker(g)$. Pour prouver que $\ker(g)$ et $\text{vect}(e_2)$ sont supplémentaires, il suffit de vérifier que la famille (u_1, u_2, e_2) est libre, ce qui est évident ! Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, e_2)$ qui est une base de \mathbb{R}^3 . Puisque $u_1, u_2 \in \ker g$ et que $g(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 = u_1 + u_2$, la matrice de g dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f dans la base précédente est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. On trouve $B^2 = 0$.

5. Soit $u = (x, y, z)$. Alors $g(u) = 0$ si et seulement si

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = z \end{cases}$$

Posons $u_1 = e_1 + 2e_2$ et $u_2 = e_3$. Alors (u_1, u_2) est une base de $\ker(g)$. Pour prouver que $\ker(g)$ et $\text{vect}(e_2)$ sont supplémentaires, il suffit de vérifier que la famille (u_1, u_2, e_2) est libre, ce qui est évident !

6. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, e_2)$ qui est une base de \mathbb{R}^3 . Puisque $u_1, u_2 \in \ker g$ et que $g(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 = u_1 + u_3$, la matrice de g dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. La matrice de f dans la base précédente est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Écrivons $A = 2I_3 + B$. Puisque I_3 et B commutent pour le produit matriciel, on peut appliquer la formule du binôme de Newton. Ici, elle se simplifie grandement parce que $B^2 = 0$. On a donc, utilisant $I_3^n = I_3$ et $I_3 B = B$,

$$A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} B.$$

Après calculs, on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} (1-n)2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 26 ▲

On va écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E . Remarquons que pour tout $k = 0, \dots, n$, on a

$$\phi(X^k) = (-k+1)X^k - kX^{k-1}.$$

Ainsi, la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $1, 0, \dots, -n+1$. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure étant exactement les valeurs situées sur la diagonale, on en déduit que ϕ est diagonalisable, ses valeurs propres étant les $(n+1) = \dim(E)$ réels distincts $1, 0, -1, \dots, -n+1$.

Correction de l'exercice 27 ▲

1. On doit vérifier que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour cela, on remarque que si $P(X) = a_n X^n + \dots$ (avec éventuellement $a_n = 0$), alors $(X^2 - 1)P'(X) = n a_n X^{n+1} + \dots$ et $(nX + 1)P(X) = n a_n X^{n+1} + \dots$. Les éventuels termes de degré $n+1$ se simplifient, et $f(P)$ est donc de degré au plus n .

2. On commence par remarquer que, pour $k = 1, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} P'_k(X) &= -k(1-X)^{k-1}(1+X)^{n-k} + (n-k)(1-X)^k(1+X)^{n-k-1} \\ &= (1-X)^{k-1}(1+X)^{n-k-1}(-k(1+X) + (n-k)(1-X)) \\ &= (1-X)^{k-1}(1+X)^{n-k-1}(-nX + (n-2k)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(X^2 - 1)P'_k(X) = (nX - (n-2k))P_k(X)$$

et donc

$$f(P_k) = (nX - (n-2k) - nX - 1)P_k = (2k - n - 1)P_k.$$

Ce calcul reste valable (et est même plus facile !) lorsque $k = 0$ ou $k = n$.

3. f est en endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n + 1$. On a trouvé $n + 1$ valeurs propres distinctes pour cet endomorphisme, les réels $2k - n - 1$ pour $k = 0, \dots, n$. Il est donc diagonalisable, et chaque espace propre est de dimension 1. Plus précisément, (P_k) est une base de l'espace propre associé à la valeur propre $2k - n - 1$.

4. f est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f . Or, l'équation $2k - n - 1 = 0$ est équivalente à $k = (n + 1)/2$. Ceci est un élément de $\{0, \dots, n\}$ si et seulement si n est impair. Donc f est bijectif si et seulement si n est pair.

Correction de l'exercice 28 ▲

On commence par remarquer que L est une symétrie : $L^2(P) = P$ pour tout polynôme P . Ainsi, L est diagonalisable, et ses seules valeurs propres possibles pour L sont donc 1 et -1 . Cherchons maintenant les vecteurs propres associés. Il est facile de voir que, pour $\lambda = \pm 1$, le polynôme $X^k + \lambda X^{n-k}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . On distingue alors deux cas :

$n = 2p + 1$ est impair. Alors pour $k = 0, \dots, p$, on pose

$$P_k(X) = X^k + X^{n-k} \text{ et } Q_k(X) = X^k - X^{n-k}.$$

Alors les familles $(P_k)_{k=0, \dots, p}$ et $(Q_k)_{k=0, \dots, p}$ sont deux familles libres (car elles sont à degré étagé) constituées de vecteurs propres associés respectivement à 1 et -1 . Les deux espaces propres associés étant en somme directe, la réunion des deux familles est encore une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$, constituée de $2(p + 1) = n + 1$ vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres pour L . $n = 2p$ est pair. Le raisonnement est similaire. Simplement, cette fois, on ne peut plus considérer le polynôme Q_p qui est nul. Mais les familles $(P_k)_{k=0, \dots, p}$ et $(Q_k)_{k=0, \dots, p-1}$ sont encore des familles libres de vecteurs propres dont la réunion est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (il y a cette fois $p + 1 + p = 2p + 1 = n + 1$ vecteurs).

Correction de l'exercice 29 ▲

1. On va procéder par récurrence sur k . La propriété est vraie si $k = 0$ ou si $k = 1$. Soit un entier $k \geq 1$ tel que la propriété est vraie. Multiplions alors cette égalité à gauche par A . On trouve

$$A^{k+1}B - ABA^k = kA^{k+1}.$$

De même, multiplions à droite par A^k l'égalité $AB - BA = A$. Il vient :

$$ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1}.$$

Si on somme les deux inégalités obtenues, on obtient immédiatement que la propriété est aussi vraie au rang $k + 1$.

2. La vérification est immédiate et laissée au lecteur.

3. Il suffit de remarquer que le résultat de la question 1. entraîne que A^k est un vecteur propre de ϕ_B associé à la valeur propre k .

4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie n^2 , ϕ_B admet au plus un nombre fini de valeurs propres distinctes. Or, si $A^k \neq 0$, k est une valeur propre de ϕ_B . Il existe donc un nombre fini d'entiers k tels que $A^k \neq 0$. En particulier, il existe au moins un entier k avec $A^k = 0$.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. Soit λ une valeur propre de f . Considérons p_λ un projecteur sur $E_\lambda(f)$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\phi(p_\lambda)(x) = f(p_\lambda(x)) = \lambda p_\lambda(x)$$

et donc p_λ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Plus généralement, soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\begin{aligned} g \in E_\lambda(\phi) &\iff \forall x \in E, f(g(x)) = \lambda g(x) \\ &\iff \forall x \in E, g(x) \in E_\lambda(f) \\ &\iff g(E) \subset E_\lambda(f). \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, $E_\lambda(\phi)$ est l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans $E_\lambda(f)$. En particulier, on en déduit que $\dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(E) \times \dim(E_\lambda(f))$. Si maintenant f est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(\phi)) = \sum_{i=1}^p \dim(E) \times \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E) \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)^2$$

où la dernière égalité vient du fait que f est diagonalisable. On en déduit que ϕ est lui-même diagonalisable.

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$AP_1 = BQ_1 + \phi(P_1), AP_2 = BQ_2 + \phi(P_2)$$

où $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et donc

$$A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (\phi(P_1) + \lambda \phi(P_2)).$$

Or, $\phi(P_1) + \lambda \phi(P_2)$ est de degré inférieur strict à B . Par unicité dans la division euclidienne, il s'agit du reste de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B , c'est-à-dire de $\phi(P_1 + \lambda P_2)$. Autrement dit, on vient de prouver que $\phi(P_1 + \lambda P_2) = \phi(P_1) + \lambda \phi(P_2)$ et donc que ϕ est un endomorphisme de E . Comme il est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il ne peut pas être surjectif et donc ce n'est pas un isomorphisme.

2. Remarquons que la réponse à la question précédente a permis de prouver que 0 est valeur propre pour ϕ . Soit P un vecteur propre associé. Alors on a $AP = BQ$, et donc $B|AP$. Comme $B \wedge A = 1$, on a $B|P$, et réciproquement tout multiple de B dans E est tel que $\phi(P) = 0$. On a donc prouvé que $E_0(\phi) = \text{vect}(B, XB, \dots, X^{n-p}B)$.

3. Soit $\lambda \neq 0$ une autre valeur propre de ϕ et P un vecteur propre associé. Ceci est équivalent à dire que $(A - \lambda)P = BQ$ et donc B divise $(A - \lambda)P$. Si on souhaite que P_k soit un vecteur propre de ϕ , il ne reste plus qu'une seule racine de B à "tuer", que l'on tue en choisissant $\lambda = A(x_k)$. Autrement dit, si $\lambda = A(x_k)$, alors toutes les racines de B sont des racines du polynôme $(A - A(x_k))P_k$, et donc (B est scindé à racines simples) $B|(A - A(x_k))P_k$. Ceci entraîne que P_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre $A(x_k)$.

4. Les P_k peuvent être compris (à un coefficient multiplicatif non nul près) comme les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels x_1, \dots, x_p (qui sont tous distincts). Ainsi, ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$. Par des considérations de degré, il est facile de vérifier que $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $E_0(\phi)$ sont supplémentaires dans E . On vient donc de trouver une base de E constituée de vecteurs propres pour ϕ . On en déduit que ϕ est diagonalisable.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. On sait, puisque le rang de f est 1, et donc que la dimension de son noyau est $n - 1$, que 0 est valeur propre de f d'ordre $n - 1$. Si f est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres pour f et donc il existe $x \in E$ vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. Mais si $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$, alors $f \circ f(x) = \lambda^2 x$ avec $\lambda^2 \neq 0$, et donc $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.

2. On a $f(u) \in \text{Im}(f) = \text{vect}(u)$, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Si λ était égal à 0, alors, puisque pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \lambda_x u$ pour un certain $\lambda_x \in \mathbb{R}$, on aurait $f \circ f(x) = 0$, et donc $f \circ f = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\lambda \neq 0$. Notons $\lambda \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$. Alors λ est valeur propre de f , et son espace propre est de dimension au moins égale à 1. De plus, 0 est valeur propre de f , et son espace propre est de dimension égale à $n - 1$. La somme des dimensions des espaces propres étant supérieure ou égale à n (et donc en réalité égale à n), f est diagonalisable.

3. On a $f(u) \in \text{Im}(f) = \text{vect}(u)$, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Si λ était égal à 0, alors, puisque pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \lambda_x u$ pour un certain $\lambda_x \in \mathbb{R}$, on aurait $f \circ f(x) = 0$, et donc $f \circ f = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\lambda \neq 0$.

4. Notons $\lambda \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$. Alors λ est valeur propre de f , et son espace propre est de dimension au moins égale à 1. De plus, 0 est valeur propre de f , et son espace propre est de dimension égale à $n - 1$. La somme des dimensions des espaces propres étant supérieure ou égale à n (et donc en réalité égale à n), f est diagonalisable.

Correction de l'exercice 33 ▲

1. On écrit d'une part que

$$BAB - \lambda B = B(AB - \lambda I)$$

et donc

$$\det(BAB - \lambda B) = \det(B)P_{AB}(\lambda).$$

En écrivant d'autre part que

$$BAB - \lambda B = (BA - \lambda I)B,$$

on obtient cette fois que

$$\det(BAB - \lambda B) = P_{BA}(\lambda) \det(B).$$

On peut simplifier par $\det(B)$ qui est non-nul et on trouve que $P_{AB} = P_{BA}$. AB et BA ont le même polynôme caractéristique. Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $f \circ g(x) = \lambda x$. On a

$$g \circ f(g(x)) = g(f \circ g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ceci prouve que $g(x) \in F_\lambda$, et donc que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. Par symétrie des rôles joués par f et g , on a aussi $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. f et g étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :

$$\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda).$$

D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que

$$\dim(g(E_\lambda)) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) \leq \dim(E_\lambda).$$

Si on met tout ensemble, on en déduit que

$$\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda).$$

Ainsi, les espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f \circ g$. Alors, puisque $f \circ g$ est diagonalisable, on a

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n.$$

D'après le résultat de la question précédente, on a aussi

$$\dim(F_{\lambda_1}) + \dots + \dim(F_{\lambda_p}) = n.$$

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ est (au moins) égale à n . C'est bien que $g \circ f$ est diagonalisable.

2. On écrit d'une part que

$$BAB - \lambda B = B(AB - \lambda I)$$

et donc

$$\det(BAB - \lambda B) = \det(B)P_{AB}(\lambda).$$

En écrivant d'autre part que

$$BAB - \lambda B = (BA - \lambda I)B,$$

on obtient cette fois que

$$\det(BAB - \lambda B) = P_{BA}(\lambda) \det(B).$$

On peut simplifier par $\det(B)$ qui est non-nul et on trouve que $P_{AB} = P_{BA}$. AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

3. Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $f \circ g(x) = \lambda x$. On a

$$g \circ f(g(x)) = g(f \circ g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ceci prouve que $g(x) \in F_\lambda$, et donc que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. Par symétrie des rôles joués par f et g , on a aussi $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

4. f et g étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :

$$\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda).$$

D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que

$$\dim(g(E_\lambda)) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) \leq \dim(E_\lambda).$$

Si on met tout ensemble, on en déduit que

$$\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda).$$

Ainsi, les espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension.

5. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f \circ g$. Alors, puisque $f \circ g$ est diagonalisable, on a

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n.$$

D'après le résultat de la question précédente, on a aussi

$$\dim(F_{\lambda_1}) + \dots + \dim(F_{\lambda_p}) = n.$$

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ est (au moins) égale à n . C'est bien que $g \circ f$ est diagonalisable.

6. Si 0 est valeur propre de $f \circ g$, alors $\det(AB) = 0$. Mais $\det(AB) = \det(BA) = 0$, et donc 0 est valeur propre de $g \circ f$. On utilise la relation suivante :

$$(AB - \alpha I)C = I \implies ABC = I + \alpha C.$$

Développant, on trouve :

$$\begin{aligned} (BA - \alpha I)(BCA - I) &= B(ABC)A - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= BA + \alpha BCA - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= \alpha I. \end{aligned}$$

On en déduit que $\det(BA - \alpha I)$ est non-nul, puisque

$$\det(BA - \alpha I) \times \det(BCA - I) = \alpha^n \neq 0,$$

et donc que $BA - \alpha I$ est inversible. D'après la question 2.1, et par symétrie des rôles joués par f et g , 0 est valeur propre de $f \circ g$ si et seulement si 0 est valeur propre de $g \circ f$. Supposons maintenant $\alpha \neq 0$, et procédons par contraposée : on suppose que α n'est pas une valeur propre de $f \circ g$. Alors $AB - \alpha I$ est inversible, et par la question précédente, $BA - \alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est pas une valeur propre de $g \circ f$. Par contraposée, toute valeur propre de $g \circ f$ est une valeur propre de $f \circ g$. Par symétrie du rôle joué par f et g , $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres. On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA est diagonalisable, tandis que AB ne l'est pas.

7. Si 0 est valeur propre de $f \circ g$, alors $\det(AB) = 0$. Mais $\det(AB) = \det(BA) = 0$, et donc 0 est valeur propre de $g \circ f$.

8. On utilise la relation suivante :

$$(AB - \alpha I)C = I \implies ABC = I + \alpha C.$$

Développant, on trouve :

$$\begin{aligned}(BA - \alpha I)(BCA - I) &= B(ABC)A - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= BA + \alpha BCA - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= \alpha I.\end{aligned}$$

On en déduit que $\det(BA - \alpha I)$ est non-nul, puisque

$$\det(BA - \alpha I) \times \det(BCA - I) = \alpha^n \neq 0,$$

et donc que $BA - \alpha I$ est inversible.

9. D'après la question 2.1, et par symétrie des rôles joués par f et g , 0 est valeur propre de $f \circ g$ si et seulement si 0 est valeur propre de $g \circ f$. Supposons maintenant $\alpha \neq 0$, et procédons par contraposée : on suppose que α n'est pas une valeur propre de $f \circ g$. Alors $AB - \alpha I$ est inversible, et par la question précédente, $BA - \alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est pas une valeur propre de $g \circ f$. Par contraposée, toute valeur propre de $g \circ f$ est une valeur propre de $f \circ g$. Par symétrie du rôle joué par f et g , $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

10. On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA est diagonalisable, tandis que AB ne l'est pas.

Correction de l'exercice 34 ▲

1. Écrivons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$. Son discriminant vaut $\Delta = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. Si $\Delta > 0$, alors χ_A possède deux racines distinctes, donc A possède deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Si $\Delta = 0$, alors comme Δ est la somme de deux carrés (de réels), on a nécessairement $a-d=0$ et $b=0$. Autrement dit, A est la matrice aI_2 et donc A est diagonalisable. Ce résultat se généralise en réalité au-delà de la dimension 2 : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (mais la preuve est plus compliquée!).

2. Gardons les mêmes notations. Le discriminant vaut toujours $\Delta = (a-d)^2 + 4b^2$, mais le carré d'un nombre complexe n'est plus toujours un réel positif ! Si $\Delta \neq 0$, on peut faire le même raisonnement que ci-dessus : χ_A admet deux racines complexes distinctes, et donc A est diagonalisable. Maintenant, si $a=2$, $b=i$ et $d=0$, on a $\Delta=0$ et A admet une valeur propre de multiplicité 2. Comme A n'est pas un multiple de l'identité, A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 35 ▲

Contrairement à ce que la formulation de la question suggère, c'est effectivement possible. En effet, considérons, pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, la matrice

$$M_{i,j} = D + E_{i,j},$$

où D est la matrice diagonale ayant sur la diagonale les nombres $1, \dots, n$. Pour $i = j$, posons $M_{i,i} = E_{i,i}$. Alors chaque matrice $M_{i,j}$ est diagonalisable. C'est évident si $i = j$ (la matrice est déjà diagonale), et si $i \neq j$, alors $M_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont tous les coefficients sur la diagonale sont différents. Ainsi, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et $M_{i,j}$ est diagonalisable. De plus, $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que c'est une famille génératrice, puisqu'on a une famille de n^2 éléments dans un espace de dimension n^2 . Prenons $A = (a_{i,j})$ une matrice. Alors, $B = A - \sum_{i \neq j} a_{i,j} M_{i,j}$ est une matrice diagonale (si vous n'êtes pas convaincu, faites un calcul explicite pour $n=2$). Mais il est clair que chaque matrice

diagonale se décompose comme somme des $E_{i,i}$, ie $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_{i,i}$. Ainsi, toute matrice A est bien combinaison linéaire des $M_{i,j}$.

Correction de l'exercice 36 ▲

Remarquons que, par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) = n - 1$ et donc que 0 est valeur propre de A avec $\dim(E(0)) = n - 1$. Soit $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A . Alors 0 est racine de χ_A de multiplicité au moins $n - 1$ et donc χ_A se factorise en $\chi_A(X) = X^{n-1}(X - c)$ avec $c \in \mathbb{K}$. Puisque d'autre part $\chi_A(X) = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots$, on en déduit que $\text{Tr}(A) = c$. On a alors :

si $c \neq 0$, alors c est une valeur propre de A et $\dim(E(c)) = 1$. Puisque $\dim(E(0)) = n - 1$, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n , et A est diagonalisable. si $c = 0$, alors la seule valeur propre de A est 0, et comme $\dim(E(0)) = n - 1 < n$, A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 37 ▲

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u . Alors, pour tout $i = 1, \dots, p$, puisque u et v commutent, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v . Notons v_i la restriction de v à ce sous-espace. v_i est encore diagonalisable. En particulier, il existe une base \mathcal{B}_i de $E_{\lambda_i}(u)$ constituée de vecteurs propres de v_i , donc de v . Observons que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de u puisque éléments de $E_{\lambda_i}(u)$. Maintenant, puisque u est diagonalisable, $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E constituée de vecteurs propres pour u et pour v , d'où le résultat.

2. On procède par récurrence sur m . Précisément, on prouve pour $m \geq 1$ la propriété suivante :

\mathcal{P}_m : Pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, pour toute famille de m endomorphismes de E , u_1, \dots, u_m , diagonalisables et commutant deux à deux, il existe une base diagonalisant tous les u_i .

La propriété est vraie pour $m = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour $m - 1$, et prouvons-la au rang m . Soit λ une valeur propre de u_1 , et E_λ le sous-espace propre associé. Alors $E_\lambda = \ker(u_1 - \lambda I_E)$ est stable par chaque u_i , pour $i \geq 2$, puisque u_i commute avec u_1 . Notons $v_{i,\lambda}$ la restriction de u_i à E_λ . Alors on a une famille de $m - 1$ endomorphismes de E_λ , $v_{2,\lambda}, \dots, v_{m,\lambda}$ qui commutent, et qui sont diagonalisables (rappelons que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable reste diagonalisable). Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base \mathcal{B}_λ de E_λ qui diagonalise chaque $v_{i,\lambda}$, pour $i \geq 2$. Elle diagonalise aussi $v_{1,\lambda}$ puisque $v_{1,\lambda} = \lambda I_{E_\lambda}$. Il suffit alors de réunir les bases \mathcal{B}_λ , pour λ décrivant l'ensemble des valeurs propres de u_1 , pour obtenir une base de E qui diagonalise tous les u_i .

Correction de l'exercice 38 ▲

1. D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P , en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g . Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f . Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi

$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$

Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f . Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i , où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

2. Soit $g \in \mathcal{C}_f$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f et g_i la restriction de g à $E_{\lambda_i}(f)$. Alors g est uniquement déterminé par les g_i . De plus, g_i peut être n'importe quel endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$. Autrement dit, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f &\rightarrow \prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f)) \\ g &\mapsto (g_1, \dots, g_p) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. L'espace $\prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f))$ ayant pour dimension $\sum_{i=1}^p \text{mult}(\lambda_i)^2$, il en est de même de \mathcal{C}_f .

3. D'après la question précédente, \mathcal{C}_f est de dimension n . La famille (Id, f, \dots, f^{n-1}) étant clairement une famille d'éléments de \mathcal{C}_f , il suffit de prouver que c'est une famille libre. Ceci peut se démontrer avec

un argument de polynôme minimal. En effet, si $\lambda_0 Id + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$, alors le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ annule f . Il est divisé par le polynôme minimal de f . Ce polynôme minimal est de degré n , car les valeurs propres de f sont toutes distinctes. Donc $P = 0$ et la famille est bien libre.

Correction de l'exercice 39 ▲

1. Si u admettait un vecteur propre x , alors $\text{vect}(x)$ serait un sous-espace de E stable par u différent de $\{0\}$ et de E , ce qui est impossible.

2. Imaginons que la famille soit liée. Alors il existe $p \leq n-1$ et des scalaires a_0, \dots, a_{p-1} tels que

$$u^p(x) = a_0 x + \dots + a_{p-1} u^{p-1}(x).$$

On vérifie alors que l'espace vectoriel $\text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u .

3. Soit b_0, \dots, b_{n-1} des scalaires tels que

$$u^n(x) = b_0 x + \dots + b_{n-1} u^{n-1}(x).$$

La matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & \ddots & 0 & b_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons aussi que, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, on a

$$u^n(u^i(x)) = b_0 u^i(x) + b_1 u^{i+1}(x) + \dots + b_{n-1} u^{i+n-1}(x).$$

Puisque $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E , on en déduit que pour tout $y \in E$, on a

$$u^n(y) = b_0 y + \dots + b_{n-1} u^{n-1}(y)$$

et donc la matrice de u dans la base $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$ est identique à celle que l'on a écrite ci-dessus.

Correction de l'exercice 40 ▲

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à A . Si on regarde bien la matrice à laquelle A doit être semblable, on remarque que les $n-r$ premiers vecteurs doivent être dans $\ker f$, que les r premiers doivent être dans $\text{Im}(f)$, et les r derniers sont définis en fonction des r premiers. On n'a donc pas trop le choix ! La condition $A^2 = 0$ entraîne que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$. Soit (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Im}(f)$ qu'on complète en une base (e_1, \dots, e_{n-r}) de $\ker(f)$. Soit enfin, pour $i = 1, \dots, r$, e_{n-r+i} un vecteur tel que $f(e_{n-r+i}) = e_i$ (un tel vecteur existe car e_i est dans $\text{Im}(f)$). Montrons que la famille (e_1, \dots, e_n) est libre, donc est une base de \mathbb{K}^n . En effet, si

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

on applique f et on trouve

$$\lambda_{n-r+1} e_1 + \dots + \lambda_n e_r = 0.$$

La famille (e_1, \dots, e_r) étant une base de $\text{Im}(f)$, on en déduit que $\lambda_{n-r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. On obtient alors

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$$

ce qui implique à son tour que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ puisque la famille (e_1, \dots, e_{n-r}) est une base de $\ker(f)$.

Maintenant, dans la base (e_1, \dots, e_n) , la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui prouve bien que A est semblable à cette dernière matrice.

Correction de l'exercice 41 ▲

1. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de E est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul matriciel montre que $f^2 = -Id$.

2. Si λ est une valeur propre associée au vecteur propre x , la condition $f^2(x) = -x$ entraîne que $\lambda^2 = -1$: il n'existe pas de valeurs propres réelles. Si l'espace était de dimension impaire, le polynôme caractéristique serait de degré impair, et aurait une racine réelle, ce qui donnerait une valeur propre réelle : impossible !

3. Soit $y \in \text{vect}(x, f(x))$, $y = ax + bf(x)$. On a :

$$f(y) = af(x) - bx \in \text{vect}(x, f(x)).$$

4. Procédons de proche en proche. Soit e_1 un vecteur non-nul de E . $f(e_1)$ n'est pas lié à e_1 , puisque f est sans valeur propre. On choisit ensuite $e_2 \notin \text{vect}(e_1, f(e_1))$. Il faut prouver que $f(e_2) \notin \text{vect}(e_1, f(e_1), e_2)$. Mais si tel était le cas, on aurait

$$f(e_2) = ae_1 + bf(e_1) + ce_2 \implies -e_2 = af(e_1) - be_1 + cf(e_2),$$

et en remplaçant $f(e_2)$ par $ae_1 + bf(e_1) + ce_2$, on trouverait que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ est liée. On continue ainsi pour construire e_3 , etc... La matrice résultante est diagonale par blocs, les n blocs sont ceux apparus à la question 1.

Correction de l'exercice 42 ▲

On écrit la relation sous la forme $PA = BP$ et on pose $S = \Re e(P)$ et $T = \Im m(P)$ de sorte que $P = S + iT$. On a donc $SA + iTA = BS + iBT$ soit encore $SA = BS$ et $TA = BT$. Le problème est que rien ne dit que S ou T soit inversible. Maintenant, on a encore pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(S + xT)A = B(S + xT).$$

Or, $R(z) = \det(S + zT)$ est un polynôme qui n'est pas identiquement nul car $R(i) \neq 0$. Il admet donc un nombre fini de racines et on peut trouver $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S + x_0T$ est inversible. On a le résultat voulu en posant $Q = S + x_0T$.

Correction de l'exercice 43 ▲

1. Il s'agit d'une application immédiate du lemme de décomposition des noyaux. En effet, on a $P(u) = 0$ avec $P(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. Les polynômes $X - 1$ et $X + 1$ étant premiers entre eux, on a $\ker P(u) = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$. On a le résultat avec $F = \ker(u - Id_E)$ et $G = \ker(u + Id_E)$. Dans une base de E constituée de la réunion d'une base de F et d'une base de G , la matrice de u est diagonale, avec $\dim(F)$ fois le nombre 1 et $\dim(G)$ fois le nombre -1 . Donc $Tr(u) = \dim(F) - \dim(G)$.

2. Le sens direct est évident, car deux endomorphismes semblables ont toujours la même trace. Pour la réciproque, supposons que u et v sont deux endomorphismes involutifs ayant même trace. Notons F_u, F_v, G_u et G_v les espaces vectoriels associés respectivement à u et v par la question précédente. Alors on a

$$\dim(F_u) + \dim(G_u) = \dim(F_v) + \dim(G_v) = n$$

$$\dim(F_u) - \dim(G_u) = \dim(F_v) - \dim(G_v) = Tr(u).$$

Ajoutant puis soustrayant ces deux égalités, on trouve que $\dim(F_u) = \dim(F_v)$ puis que $\dim(G_u) = \dim(G_v)$. Il existe donc $\phi : F_u \rightarrow F_v$ un endomorphisme bijectif, et $\psi : G_u \rightarrow G_v$ un autre endomorphisme bijectif. Définissons γ sur $E = F_u \oplus G_u$ par $\gamma = \phi \oplus \psi$, c'est-à-dire que $\gamma(x \oplus y) = \phi(x) \oplus \psi(y)$, où $x \oplus y$ est la décomposition d'un vecteur z de E dans $F_u \oplus G_u$. Alors γ est clairement un automorphisme de E . De plus, si $x \in F_u$,

$$\gamma^{-1} \circ v \circ \gamma(x) = \gamma^{-1} \gamma(x) = x$$

et si $x \in G_u$, alors

$$\gamma^{-1} \circ v \circ \gamma(x) = \gamma^{-1}(-\gamma(x)) = -x$$

puisque ici $\gamma(x) \in G_\gamma$. Ceci prouve bien que u et v sont semblables.

3. Il y a au plus $n+1$ classes de similitude, puisque ces classes sont complètement déterminées, d'après la question précédente, par la valeur de

$$\dim(F_u) - \dim(G_u) = \dim(F_u) - (n - \dim(F_u)) = 2\dim(F_u) - n,$$

et que ceci peut prendre $n+1$ valeurs distinctes puisque $\dim(F_u) \in \{0, 1, \dots, n\}$. De plus, chacune de ces classes est non-vide. En effet, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , si $k \in \{0, \dots, n\}$, et si u est défini par $u(e_j) = e_j$ si $j \leq k$, $u(e_j) = -e_j$ si $j > k$, alors u est un endomorphisme involutif avec $\dim(F_u) = k$.

Correction de l'exercice 44 ▲

On va raisonner par récurrence sur n . Si $n = 1$, le résultat est trivial. Admettons que le résultat soit vrai au rang $n-1$ et prouvons-le au rang n . Soit f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la famille $(x, f(x))$ est liée, alors on sait que (attention, ce n'est pas trivial!) f est une homothétie, $f = \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$. Dans ce cas, λ doit être nul et la propriété est évidente! Sinon, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre. Complétons alors la famille en $(x, f(x), e_3, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n . Dans cette base, la matrice de f a la forme suivante :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & A' \end{array} \right)$$

où A' est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Par hypothèse de récurrence, $A' = QB'Q^{-1}$ où B' a la forme voulue. Posons

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$$

qui est inversible. De plus on a

$$PBP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & B' \end{array} \right).$$

Autrement dit A est semblable à B qui est elle-même semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. A est semblable à cette dernière matrice et le résultat est prouvé au rang n .
